COMPENDIO

DE

ARITHMETICA

COMPOSTO PARA O USO

DAS

ESCOLAS PRIMARIAS DO BRASIL,

POR

Candido Baptista de Oliveira, Lente da Academia Militar, e Membro da Camara dos Deputados

RIO DE JANEIRO.

Na Typographia Nacional.

1832.

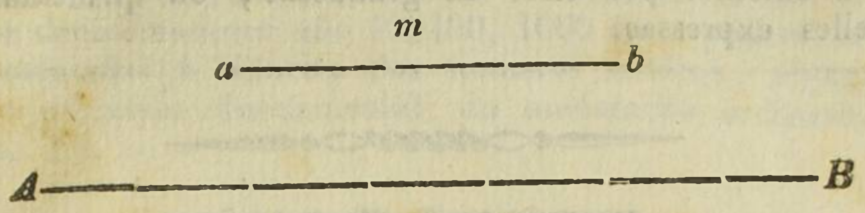
Offerecid. pelo autor ao Illmo
Sr. J. J. P. dos Santos Barreto.

ADVERTENCIA.

A' Instancias de amigos meos, movidos pelo desejo de verem entre nós melhorado o ensino elementar, aproveitei algumas pequenas folgas, que ultimamente me permittirão os meos habituaes padecimentos, para compor o presente Compendio de arithmetica, acommodado para o uso das nossas Escolas de instrucção primaria, especialmente de ensino mutuo. Ver-se-ha pela sua leitura, que eu desenvolvo a doutrina do calculo numerico por hum methodo inteiramente novo, tendo em vista a economia do tempo e da despeza no ensino, sem mingoa, ao que me parece, da desejada instrucção nesta parte. Com effeito bastará, que o professor, munido deste Compendio, trace em hum painel, segundo a ordem das lições, as tabellas que nelle se contém, explicando-as pela maneira indicada em as notas correspondentes; as quaes, sendo fielmente copiadas pelos alumnos, reproduzirão nas mãos destes toda a doutrina util, que elle encerra, logo que terminada seja a sua exposição.

Espero do zelo patriotico dos professores, que tiverem a curiosidade de ensaiar nas suas aulas o ensino da arithmetica por este Compendio, que hajão de communicar-me as suas observações á cerca do resultado, que ella offerece na pratica, a fim de emendar, guiado pela experiencia, em huma nova edicção, as faltas reconhecidas na primeira; prevenindo-os ao mesmo tempo, que a presente edição seria menos defeituosa, se eu tivera tido vagar, para fazer huma reflectida revisão do manuscripto, antes de ser dado ao prelo, e se por outra parte este não fôra o fructo de hum trabalho muitas vezes interrompido.

INTRODUCCÃO.



A S distancias representadas pelos traços *AB*, *ab* são grandezas, ou quantidades da mesma especie.

Se se concebe a distancia *ab*, que se figura como a menor das duas, applicada successivamente sobre a distancia *AB*, partindo do ajustamento das extremidades *A*, *a*; póde acontecer, que na ultima superposição a extremidade *b*, se ajuste exactamente com a extremidade *B*: então a distancia *ab* repetida tantas vezes, quantas ella entra em *AB*, reproduz huma grandeza equivalente á esta distancia. Neste caso se diz, que a grandeza *AB* he hum *multiplo* de *ab*; e reciprocamente, que *ab* he hum *submultiplo* de *AB*.

Se a distancia *ab* não entra exactamente na distancia *AB*, póde ainda acontecer, que, concebendo-se a distancia *ab* dividida em partes iguaes entre si, huma dessas partes p. ex. *am* preencha a supposição precedente. Neste caso se diz, que a grandeza *AB* he *multiplo de hum submultiplo de* ab.

Se tem lugar alguma das supposições precedentes, se diz, que as grandezas *AB*, *ab* são entre si commensuraveis.

Huma grandeza p. ex. *ab*, com a qual se comparão todas as outras da mesma especie, toma o nome de *unidade*.

Hum multiplo qualquer da unidade, ou de algum submultiplo della chama-se *numero*.

Os multiplos da unidade chamão se *numeros in-*

teiros; e os multiplos de submultiplos della chamão-se *numeros fraccionarios*, ou simplesmente *fracções*.

A Arithmetica ensina a representar os numeros, e a calcular por elles as grandezas, ou quantidades nelles expressas.

PRIMEIRA SECÇAÕ.

Notaçaõ Arithmetica.

Dos Numeros Inteiros.

1.º Para representar hum numero inteiro qualquer empregão-se signaes de convenção, que por si, ou pelo arranjo, em que tambem se conveio escrever huns á respeito dos outros, preenchem este fim. (tab. A, B, C, D).

2.º Todo o artificio empregado nas tabellas (A, B, C, D,) para representar hum numero inteiro qualquer reduz-se á seguinte regra convencional. — *Hum algarismo qualquer posto á esquerda de outro representa unidades taes, que cada huma destas he décupla daquellas que representaria, se occupasse o lugar do segundo.* — Este principio de convenção tem o nome de *lei da numeração ordinaria*, para distinguir este systema de outro qualquer, em que se fizesse uso de mais, ou de menos de dez algarismos.

Dos Numeros fraccionarios, ou fracções.

3.º Se se concebe a unidade, p. ex. a distancia *ab*, dividida em 2 partes iguaes, em 3 partes iguaes, &c.; cada huma destas partes será hum submultiplo da unidade: e haverá tantos submultiplos differentes, quantos forem os differentes numeros de partes iguaes, em que a unidade se conceber dividida. Estes submultiplos entrão na composição de quaesquer multiplos delle, ou das fracções, do mesmo modo que a unidade entra na composição de hum numero inteiro. (tab. E).

4.º As fracções, chamadas *ordinarias* na tab. E, cujos denominadores são 10, 100, 1000 &c., podem ser representadas á maneira dos numeros inteiros, segundo o principio fundamental da numeração ordinaria. (tab. F).

SEGUNDA SECÇAÕ.

Calculo Arithmetico.

5.º O calculo arithmetico comprehende a *composição e decomposição, transformação e combinação dos numeros.*

6.º Se dois numeros quaesquer são representados o maior por (a), e o menor por (b); as questões, que se podem propor, á cerca da *composição*, e *decomposição* dos numeros, reduzem-se á quatro, da seguinte fórma.

1.ª —— Achar hum numero $= a + b$?
2.ª —— Achar hum numero $= a - b$?
3.ª —— Achar hum numero $= a \times b$?
4.ª —— Achar hum numero $= a : b$?

Nota. — Os signaes (+), (—), (×), (:) substituem as palavras (*mais*), (*menos*), (*multiplicado por*), *dividido por*); e querem dizer; na 1.ª questão, que (a) se deve juntar á (b), como já se vio em outra parte; na 2.ª, que de (a) se deve tirar (b); na 3.ª, que (a) se deve repetir, ou tomar tantas vezes, quantas são as unidades de (b); na 4.ª, que se deve procurar, quantas vezes (a) comtem a (b). Este modo de enunciar as duas ultimas questões he só rigorosamente exacto, quando (b) for hum numero inteiro na 3.ª, e (a) contiver exactamente a (b), na 4.ª: mas a simplicidade e clareza de taes enunciados, os torna preferiveis á outros quaesquer; além de que na resolução pratica das questões respectivas se corrige inteiramente este defeito.

As operações pelas quaes se resolvem estas quatro differentes questões tem, na mesma ordem destas, as seguintes denominações. — 1.ª *Addição.* — 2.ª *Subtracção.* — 3.ª *Multiplicação.* — 4.ª *Divisão.* — Os numeros dados (a) e (b) chamão-se — na 1.ª *parcellas*; e o pedido *somma* — na 2.ª (a) o o *maior*, (b) o *menor*; e o pedido *differença* — na 3.ª (a) o *multiplicando*, (b) o *multiplicador*, ou ambos *factores*; e o pedido *producto* — na 4.ª (a) o *dividendo*, (b) o *divisor*; e o pedido *quociente.*

7.º He facil de comprehender, que os enunciados da 2.ª e 4.ª questão, das quatro acima mencionadas, se podem converter nos seguintes — 2.ª Achar hum numero que junto ao menor [b] dê huma somma igual ao maior [a]? — 4.ª Achar hum numero, pelo qual sendo multiplicado o divisor [b], dê hum producto igual ao dividendo [a]? Daqui se vê, que a *Subtracção* e a *Divisão* podem reduzir-se á *addição* e a *multiplicação*, applicadas á resolução das questões respectivamente inversas da 1.ª e da 3.ª

8.º A addição, subtracção, multiplicação, e a divisão praticão-se, como se exemplifica:

——sobre os *numeros inteiros*, nas tab. G, H, I, L.

——sobre as *fracções ordinarias*, na tab. M.

——sobre as *fracções decimaes*, na tab. N.

Nota. — Depois da tabella [L] está collocada huma tabella sem designação alfabetica, por não conter doutrina nova; mas convirá que ella seja consultada de preferencia ás tab. G, e I, das quaes he huma abreviação, logo que o uso destas for bem conhecido.

9.º As *transformações* dos numeros em geral podem ser infinitamente variadas; mas aquellas, que fazem objecto de doutrina especial, limita-se a hum pequeno numero de fórmas, que podem tomar as fracções, em certos casos, como se mostra na tab. O.

10. As *combinações* entre os numeros, das quaes se occupa a Arithmetica, são conhecidas debaixo do nome de *proporções*, cuja doutrina se acha comprehendida nos exemplos da tab. P.

Nota. — A natureza das proporções por quocientes offerece o meio mais breve, e rigoroso de definir exactamente a *multiplicação* e a *divisão*; dizendo na primeira, que a *unidade* está para o *multiplicador* assim como o *multiplicando* está para o *producto* pedido; e na segunda, que o *divisor* está para o *dividendo* assim como a *unidade* está para o *quociente* pedido: pois que em ambos estas proporções se verifica a propriedade fundamental da igualdade entre o producto dos *extremos* e o dos *meios*, o que he, por outra parte, no caso presente huma propriedade commum ás mencionadas operações. Assim a multiplicação, e a divisão não são outra cousa mais, do que a pratica de *regra* de *tres* applicada á resolução das questões, que lhes são relativas.

Observação Final.

Em conformidade com o systema metrologico, de que se faz uso nas questões praticas da Arithmetica, empregão-se muitas vezes no calculo numeros, que comprehendem differentes especies de unidades, subordinadas humas ás outras, segundo a relação de grandeza, que ellas guardão entre si, aos quaes se dá o nome de *numeros complexos.*

O calculo destes numeros, quanto á *addiçaõ*, e á *subtracçaõ*, pratica-se de hum modo inteiramente similhante ao que se ensinou á cerca dos *numeros inteiros*, sem nelles fazer previamente mudança alguma; quanto porém á *multiplicação*, e á *divisão*, he mister apenas, geralmente fallando, transformar primeiramente os numeros complexos propostos em fracções ordinarias, o que he sempre possivel, a fim de praticar depois sobre estas as mencionadas operações. He por esta razão, que no texto se não fez mensão particular do calculo dos numeros desta especie.

A.

NUMEROS ELEMENTARES.

0 = nada	e se diz	nenhuma unidade	ou	zero
1 = 0 + 1	„	huma „	„	hum
2 = 1 + 1	„	duas „	„	dois
3 = 2 + 1	„	tres „	„	tres
4 = 3 + 1	„	quatro „	„	quatro
5 = 4 + 1	„	cinco „	„	cinco
6 = 5 + 1	„	seis „	„	seis
7 = 6 + 1	„	sete „	„	sete
8 = 7 + 1	„	oito „	„	oito
9 = 8 + 1	„	nove „	„	nove

O signal (=) quer dizer *igual á*, e (+) quer dizer *mais.*

Nota. — Na leitura desta tabella convem tomar primeiramente as denominações da columna da direita, para designar os respectivos signaes da columna da esquerda, dizendo: — *zero igual á nada, ou nenhuma unidade: hum igual á zero mais hum, ou huma unidade: dois igual á hum mais hum, ou duas unidades &c.* Os signaes — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, — tem o nome de *algarismoo*: os nove ultimos chamão-se particularmente *algarismos significativos*; e os *numeros*, que elles representão, tem tambem a denominação especial de *numeros digitos*; podendo estes chamar-se com propriedade *elementares*, em razão de entrarem na composição de todos os outros.

B.

Formação das dezenas.							
	10=90+1	e se diz	1 dezena	ou	dez unidades	ou	dez
	20=10+10	,,	2 ,,	,,	vinte ,,	,,	vinte
	30=20+10	,,	3 ,,	,,	trinta ,,	,,	trinta
	40=30+10	,,	4 ,,	,,	quarenta ,,	,,	quarenta
	50=40+10	,,	5 ,,	,,	cincoenta ,,	,,	cincoenta
	60=50+10	,,	6 ,,	,,	sessenta ,,	,,	sessenta
	70=60+10	,,	7 ,,	,,	setenta ,,	,,	setenta
	80=70+10	,,	8 ,,	,,	oitenta ,,	,,	oitenta
	90=80+10	,,	9 ,,	,,	noventa ,,	,,	noventa

Nota. — Esta tabella lê-se como a precedente, dizendo: — *dez igual á nove mais hum*, *huma dezena*, *ou dez unidades*: *vinte igual á dez mais dez*, *duas dezenas*, *ou vinte unidades*: *&c.* Pela inspecção da tabella vê-se, que os novos numeros, que ella encerra, não são outra cousa mais, do que os mesmos elementares referidos á huma nova unidade, denominada dezena, décupla da unidade fundamental.

C.

Formação das centenas.	100=90 +10	e se diz	1 centena	ou	10 dezenas	ou	cem unidades	ou	cem
	200=100+100	„	2 „	„	20 „	„	duzentas „	„	duzentos
	300=200+100	„	3 „	„	30 „	„	trezentas „	„	trezentos
	400=300+100	„	4 „	„	40 „	„	quatrocentas „	„	quatrocentos
	500=400+100	„	5 „	„	50 „	„	quinhentas „	„	quinhentos
	600=500+100	„	6 „	„	60 „	„	seiscentas „	„	seiscentos
	700=600+100	„	7 „	„	70 „	„	setecentas „	„	setecentos
	800=700+100	„	8 „	„	80 „	„	oitocentas „	„	oitocentos
	900=800+100	„	9 „	„	90 „	„	novecentas „	„	novecentos

Nota. — Similhantemente ao que se praticou na leitura das duas tabellas precedentes, se diz: — *cem igual á noventa mais dez*, *huma centena*, *dez dezenas ou cem unidades*, *ou cem &c.* Convém notar, que os novos numeros, encerrados nesta tabella, são compostos de dezenas, do mesmo modo, que os da tabella *(B)* se compoem de unidades; isto he, os numeros elementares referidos á huma nova unidade, denominade **centena**, décupla de huma dezena, e **centupla** da unidde fundamental.

D.

Unidades principaes	1:000 .... =900+100	e se diz	1 milhar de unidades ou mil
	1:000:000. .... =1:000 milhares	"	1 milhão.
	1:000:000:000 .... =1:000 milhões	"	1 milhar de milhões:
	1:000:000:000:000 =1:000 milhares de milhões	"	1 bilião.

Exemplo de numeros compostos						
365 unidades .... =						3 6 5
360 milhares .... =					3 6 0	0 0 0
305 milhões .... =				3 0 5	0 0 0	0 0 0
65 milhares de milhões. =			6 5	0 0 0	0 0 0	0 0 0
5 biliões .... =		5	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
NUMERO COMPOSTO............	[*]	**5**	**065**	**305**	**360**	**365**
DISTRIBUIDO EM CLASSES.		biliões	milhares de milhões	milhões	milhares	unidades

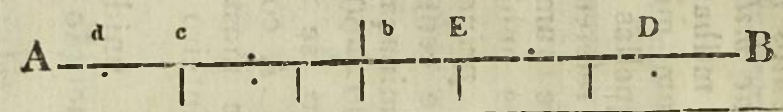
[*] Este numero lê-se :—cinco biliões, sessesta e cinco mil, trezentos e cinco milhões, trezentos e sessenta mil, trezentas e sessenta e cinco unidades. —

Nota. — A exemplo das tabellas precedentes, diz-se: — *mil igual á novecentos mais hum*, ou *hum milhar de unidades*: *hum milhão igual á mil milhares*: *hum milhar de milhões igual á mil milhões*: *&c.* Do mesmo modo, que entre a unidade fundamental e hum milhar se intercalárão duas especies de unidades (dezena, e centena), assim tambem entre hum milhar e mil milhares, ou hum milhão, podem existir duas especies inteiramente analogas áquellas, ás quaes se dão sem inconveniente as mesmas denominações de *dezena*, e *centena*, com referencia porém á unidade de milhar, á que ellas são subordinadas. O mesmo tem lugar entre hum milhão e mil milhões: &c. He em razão da subordinação das especies intercalares á taes unidades, que estas juntamente com a fundamental tomão a denominação generica de *unidades principaes*. A concorrencia de cada huma das especies de unidades principaes com as dezenas e centenas, que lhe são subordinadas, fórma o que se chama huma classe, com a mesma denominação da respectiva unidade principal: por exemplo: 3 centenas $+$ 6 dezenas $+$ 5 unidades $= 300 + 60 + 5$, que se escreve 365, e se diz trezentos e sessenta e cinco unidades. Do mesmo modo se formão as classes de milhares, de milhões, &c., cuja notação se acha indicada na tabella. A concorrencia de huma ou mais classes fórma em geral o *numero composto*, cuja notação se mostra no exemplo [*]: e por este exemplo se vê tambem a maneira de lêr hum numero inteiro qualquer, distribuindo-o para esse fim em classes de tres letras da direita para a esquerda.

Convém advertir, que os numeros inteiros compostos podem comprehender unidades principaes de mais alta denominação, do que *bilião*; das quaes se não faz aqui menção, por não terem uso nas applicações ordinarias da Arithmetica.

Deve-se aqui notar, que huma classe não deixa de ser considerada como tal, por serem huma duas, ou as tres especies de unidades, que a compoem representadas por zeros.

E.



SUBMULTIPLOS DA UNIDADE.	$\frac{1}{2}$ = metade da unidade	e se diz	hum meio
	$\frac{1}{3}$ = terça parte ,,	,,	hum terço
	$\frac{1}{4}$ = quarta parte ,,	,,	hum quarto
	$\frac{1}{5}$ = quinta parte ,,	,,	hum quinto
	$\frac{1}{6}$ = sexta parte ,,	,,	hum sexto
	$\frac{1}{7}$ = setima parte ,,	,,	hum setimo
	$\frac{1}{8}$ = oitava parte ,,	,,	hum oitavo
	$\frac{1}{9}$ = nona parte ,,	,,	hum nono
	$\frac{1}{10}$ = decima parte ,,	,,	hum decimo
	$\frac{1}{11}$ = undecima parte ,,	,,	hum onze avos
	$\frac{1}{12}$ = duodecima parte ,,	,,	hum doze avos
Exemplos de fracções ordinarias.	$\frac{3}{5}$ = triplo de $\frac{1}{5}$	e se diz	tres quintos
	$\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ tomado 9 vezes	,,	nove decimos
	$\frac{21}{20} = \frac{1}{20}$ tomado 21 vezes	,,	vinte um vinte avos

NOTA.

Supponda a unidade representada pela distancia AB; e se concebe esta dividida em 2, 5, 10 partes iguaes, ter-se-ha

$\frac{1}{2}$ (hum meio)=Ab=metade de AB

$\frac{1}{5}$ (hum quinto)=Ac=quinta parte de AB

$\frac{1}{10}$ (hum decimo)=Ad=decima parte de AB

$\frac{3}{5}$ (tres quintos)=triplo de Ac=AC

$\frac{9}{10}$ (nove decimos)=Ad tomada 9 vezes=AD

$\frac{21}{20}$ (vinte hum vinte avos) [*] =AB+metade de Ad

A denominação *ávos* he empregada na designação dos submultiplos menores do que $\frac{1}{10}$: por ex. $\frac{1}{11}$ quer dizer *huma das onze partes iguaes*, em *que a unidade se suppoem dividida*; mas por abreviatura diz-se *hum onze-avos.*

Os dois numeros que entrão na expressão de huma fracção chamão-se *termos* da *fracção*: o termo inferior, que designa o numero de partes iguaes, em que a unidade se suppoem dividida chama se *denominador*; e o termo superior que representa hum multiplo de huma dessas partes tem o nome de *numerador.*

As fracções maiores do que a unidade, ou aquellas em que o numerador he maior do que o denominador, como he p. ex. $\frac{21}{20}$, chamão-se improprias; e por opposição á estas se chamão proprias todas as outras que não estão neste caso.

---

[*] Metade de Ad tomado 21 vezes.

F.

SUBMULTIPLOS DECIMAES.	$\frac{1}{10}$	se escreve	0,1	e se diz	huma decima.	
	$\frac{1}{100}$	”	0,01	”	huma centesima.	
	$\frac{1}{1000}$	”	0,001	”	huma millesima.	
	$\frac{1}{10000}$	”	0,0001	”	huma decima-millesima.	
	$\frac{1}{100000}$	”	0,00001	”	huma centesima-millesima.	
	$\frac{1}{1000000}$	”	0,000001	”	huma millionesima.	
A virgula (,) denota que o zero (0) collocado á esquerda occupa a casa das unidades.						
Exemplos de fracções decimaes.	$\frac{365}{10} = 36,5$	e lê-se	365 decimas	ou	36 unidades, e 5 decimas.	
	$\frac{365}{100} = 3,65$	”	365 centesima	ou	3 unidades, 6 decimas, e 5 centesimas.	
	$\frac{365}{1000} = 0,365$	”	365 millesimas	ou	3 decimas, 6 centesimas, e 5 milhesimas.	

NOTA.

Do mesmo modo que na representação dos numeros inteiros, 1 dezena, 1 centena, 1 milhar &c., se escrevem huma, duas, tres casas, &c., para a esquerda da casa da unidade fundamental, assim tambem 1 decima, 1 centesima, 1 milhesima parte desta unidade, &c., podem ser assignadas huma casas duas, tres ~~vezes~~, &c., para a direita daquella: pois que 1 unidade=10 decimas =100 centesimas, assim como 1 centena=10 dezenas=100 unidades.

$$\frac{365}{10}=365 \text{ decimas}=300 \text{ decimas}+60 \text{ decimas}+5 \text{ decimas}.$$

$$=3 \text{ dezenas}+6 \text{ unidades}+5 \text{ decimas}=36,5.$$

Do mesmo modo se discorrerá nos outros dois casos. Não se faz menção nesta tabella dos submultiplos menores, do que 1 milhonesima, por serem raramente empregados na pratica.

As fracções decimaes são tambem designadas pela denominação de numeros decimaes, quando á esquerda da virgula se acha algum algarismo significativo; o que corresponde á distincção entre as fracções ordinarias proprias, e improprias.

G.

ADDIÇAÕ ELEMENTAR.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Nota. — Para formar esta tabella, escreve-se primeiramente a serie dos algarismos no alto della, e na columna da esquerda; ajunta-se depois 1 á cada hum dos algarismos significativos da primeira, para ter a serie immediatamente inferior 2, 3, 4, &c; dizendo-se $1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4$, &c. Pratica-se com esta o mesmo que se fez com a primeira, tem-se a nova serie 3, 4, 5, &c. ; dizendo $2+1=3$, $3+1=4$, &c.; o que equivale a ajuntar 2 á cada hum dos algarismos da primeira: e assim por diante. Por esta tabella se resolvem as duas questões seguintes:

1.a Qual he o numero igual á 7 addicionado á 5, ou igual á 7 mais cinco $=7+5$? Tomando estes dois numeros indistinctamente, hum na serie do alto da tabella, e outro na serie do lado esquerdo, acha-se, que lhes corresponde o numero 12 pedido.

2.a Qual he o numero igual á 12 subtrahindo 7, ou igual á 12 menos $7=12-7$? Converte-se primeiramente a questão nesta outra:

Qual he o numero, que junto a $7=12$? Tomando o numero 7 em huma das mencionadas series, e procurando no corpo da tabella o numero 12 do mesmo alinhamento, acha-se, que corresponde a este na outra serie o numero 5 pedido.

Por este modo se resolveráõ todas as outras questões da mesma natureza, em que os numeros dados sejão comprehendidos dentro dos limites desta tabella.

H.

ADDIÇAÕ, E SUBTRACÇAÕ PRATICADAS SOBRE NUMEROS INTEIROS.								
addição.	parcella..	365			3.650	3.650	parcella	*addição successiva.*
	,, ..	240			6.851	36.500	,,	
	somma ..	605	maior	*subtracção*	10.501	365	,,	
		365	menor		3.650	. . . .	,,	
		240	differença		6.851	40.515	somma	
1.º Exemplo.					2.º Exemplo.	3.º Exemplo.		

Nota. — [1.º exemplo]. *Addição.* Escriptas as *parcellas* dadas, como a tab. indica, isto he, de maneira que as unidades da mesma especie se correspondão; diz-se, começando da direita para a esquerda, 5 unidades +0 de unidades =5 unidades, que se assentão correspondentemente por baixo do traço: 6 dezenas +4 dezenas =10 dezenas =1 centena +0 de dezenas; e escrevendo o [0] na casa das dezenas conserva-se mentalmente 1 centena para addicional-a ás outras das parcellas: 3 centenas +2 centenas =5 centenas que juntas com 1 centena da operação precedente dão 6 centenas, que se assignão na casa competente: o numero assim achado he a *somma* pedida. *Subtracção.* Escriptos os numeros dados *maior* e *menor*, do mesmo modo que na addição; diz-se, começando tambem da direita, 5 unidades do menor +0 de unidades =5 unidades do maior; e assenta-se [0] correspondentemente por baixo do traço: 6 dezenas do menor +4 dezenas =10 dezenas do maior; e assentão-se as 4 dezenas na casa competente. 3 centenas do menor +2 centenas =5 centenas do maior, pois que na operação precedente já se contou com 1 centena, ou 10 dezenas; e assentão-se as 2 centenas na casa que lhes compete: o numero assim achado he a *differença* pedida. [2.º exemplo]. Neste exemplo procede-se do mesmo modo, que no precedente, advertindo que no caso da subtracção o numero maior se deve trasformar mentalmente em 1 unidade, 10 dezenas, 14 centenas, e 9 milhares.

Convem observar que a *addição* e *subtracção*, resolvendo questões inversas huma da outra, podem servir reciprocamente para verificar seos resultados: isto he, no caso da *addição* a somma achada menos huma das parcellas deve ser igual á outra; e na *subtracção* o numero menor junto á differença achada deve dar o maior.

[3.º Exemplo]. *Addição successiva.* Esta operação tem lugar sendo dado hum numero qualquer de *parcellas*; estas parcellas escrevem-se do mesmo modo, que se praticou na addição ás duas parcellas, e procede-se de huma maneira similhante; dizendo no caso presente, 0+0+5 unidades $=5$ unidades; 5 dezenas $+0$ de dezenas $+6$ dezenas $=11$ dezenas $=1$ centena $+1$ dezena: I centena da operação precedente com 6 fazem 7, e 5 fazem 12, e 3 fazem $15=1$ milhar $+5$ centenas: 1 milhar com 3 fazem 4. O numero assim achado he a somma pedida.

I.

MULTIPLICAÇAÕ ELEMENTAR.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Nota. — Escripta a serie dos algarismos significativos, como se fez na formação da tab G, isto he, no alto e ao lado esquerdo da tabella, ajunta se cada hum dos algarismos da primeira á si mesmo [excepto o primeiro] para ter a serie 4, 6, 8, &c.; dizendo $2+2=4$, $3+3=6$, &c. Ajunta-se depois cada hum dos numeros desta serie com o seo correspondente na primeira, e tem-se a serie 6, 9 12, &c.; dizendo $2+4=6$, $3+6=9$, &c. Pratica-se com esta serie o mesmo que se fez com a precedente, e tem a serie 8, 12, 16, &c.; dizendo $2+6=8$, $3+9=12$, &c.; e assim por diante. As series de numeros que se vão achando successivamente, não são outra cousa mais, do que os algarismos correspondentes na primeira tomados 2, 3, 4, &c. vezes. Por esta tabella se resolvem as duas questões seguintes:

1.ª Qual he o numero igual á 7 tomado 5 vezes, ou igual a 7 multiplicado por $5 = 7 \times 5$? Consultando esta tabella do mesmo modo que se praticou na nota precedente, acha-se, que aos algarismos propostos 7, e 5 correspondente no corpo da tabella o numero 35 pedido.

2.ª Qual he o numero igual ás vezes que 35 contém a 7, ou igual á 35 dividido por $7 = 35 : 7$? Converte-se primeiramente a questão nesta outra: Qual he o numero, pelo qual sendo repetido $7 = 35$? Consultando a tabella, acha-se que ao numero 35 que está no alinhamento do algarismo 7, corresponde ao numero 5 pedido. Do mesmo modo se procederá em outras questões similhantes, que não saião fora dos limites da tabella.

L.

MULTIPLICAÇAÕ E DIVISAÕ, PRATICADAS SOBRE NUMEROS INTEIROS.

Multiplicação. multiplicando ..	72	
multiplicador . . .	365	
	360	
	432	[1.o exemplo]
	216	
producto	26280	.... dividendo
	216	72 divisor
	468	
	432	365 quociente *Divisão.*
	360	
	360	
	000	

10400	
9080	
832	
936	
9443200(0	
3^{36} 32	908(0
000 00	10400
[2.º exemplo]	

Nota. — [1.º exemplo]. *Multiplicação*. Dispostos os numeros dados, o *multiplicando* e o *multiplicador*, ou os *factores*, como indica a tabella, começa-se da direita para a esquerda, dizendo: 2 unidades $\times 5 = 10$ unidades $= 1$ dezena $+ 0$ de unidades; e assenta-se o [0] na casa das unidades, por baixo do traço conservando mentalmente 1 dezena para ajuntar ás outras da operação seguinte: 7 dezenas $\times 5 = 35$ dezenas, que com 1 dezena da operação antecedente fazem 36 dezenas, que se assentão no lugar competente: 2 unidades $\times 60 = 2$ unidades $\times 6.10$ [o signal (.) quer dizer, que o resultado da primeira multiplicação de 2 por 6 deve ser ainda multiplicado por 10] $= 12$ unidades $\times 10 = 12$ dezenas $= 1$ centena $+ 2$ dezenas; e assentão-se 2 dezenas por baixo da casa das dezenas do numero precedentemente achado 7 dezenas $\times 60 = 7$ dezenas $\times 6.10 = 42$ dezenas $\times 10 = 42$ centenas, que com 1 centena da operação precedente fazem 43 centenas, que se assentão no lugar competente: 2 unidades $\times 300 = 2$ unidades $\times 3.100 = 6$ unidades $\times 100 = 6$ centenas, que se assentão por baixo da casa das centenas do numero precedente achado: 7 dezenas $\times 300 = 7$ dezenas $\times 3.100 = 21$ dezenas $\times 100 = 21$ milhares que se assentão no lugar competente: a somma dos tres numeros asim achados, ou dos *productos parciaes* dá o *producto total* pedido. *Divisão*. Dispostos os dois numeros dados, o *dividendo* e o *divisor*, como a tabella indica, começa-se por tomar na esquerda do *dividendo* huma parte que possa conter o divisor, marcando com hum ponto a casa até onde se estende esta parte; e procede se, dizendo —26 [os primeiros dois algarismos do dividendo] contém 7 [primeiro algarismo do divisor] 3 vezes; e assenta-se 3 por baixo do divisor: multiplica-se depois o divisor por 3, e assenta-se o producto 216 por baixo da mencionada parte tomada, fazendo corresponder o algarismo marcado nesta com o primeiro da direita daquelle numero: praticada a subtração entre estes dois numeros, acha-se a differença 46: escreve-se agora o algarismo 8, immediato, á direita do numero 46, marcando o primeiramente com hum ponto na casa em que se achava; e procede-se com este dividendo parcial do mesmo modo que se praticou com o primeiro; isto he, 46 contém a 7, 6 vezes, assentando 6 por baixo do divisor, e á direita do 3 já achado: executada a multiplicação e subtracção tem-se a differença 36 — escreve-se finalmente [0] ultimo algarismo do dividendo á direita do numero 36, com o qual fórma hum novo dividendo parcial, que tratado do mesmo modo que os precedentes dá o algarismo 5, que se escreve por baixo do divisor á direita do numero achado 36. He facil de comprehender que o numero assim achado 365 representa as vezes que o divisor entra no dividendo; e que he por conseguinte a *quociente* pedido: para isso se deve observar, que os dividendos parciaes correspondem á outros tantos productos parciaes, que devem existir reunidos no dividendo considerado como hum producto do divisor multiplicado pelo quociente, dispostos n'huma ordem inversa, isto he, o 1.º dividendo parcial corresponde ao ultimo producto parcial; e o ultimo dividendo parcial ao 1.º producto parcial.

[2.º Exemplo]. *Multiplicação.* Neste exemplo executa-se esta operação, sem fazer attenção aos zeros, que estão á direita de ambos os factores, isto he, multiplica-se 104 por 908, e escrevendo os zeros depois á direita do producto achado: e he claro, que esta simplificação em nada altera a exactidão do producto, pois que os 3 zeros que se juntarão á direita do numero assim achado correspondem á outras tantas columnas de zeros, que se deverião sommar, praticando a operação por extenso, do que se póde ver huma prova na repetição de 104 pelo zero posto á esquerda do 8, que dá hum producto representado por zeros. *Divisão.* Neste exemplo, com o fim de abreviar a operação, primeiramente não se faz menção de hum zero da direita do dividendo, e do divisor; o que em nada altera o quociente, pois que he evidente, que por exemplo 20 contem a 10 tantas vezes, quantas 2 contém a 1: depois disso executão-se as subtracções mentalmente, escrevendo-se sómente os restos successivos, dizendo — I vez 8 he 8 e 6 fazem 14, 1 vez 0 he zero e 3 fazem 3, 1 vez 9 he nove e zero [que não se escreve] fazem 9: o novo dividendo parcial 363 não póde conter o divisor, donde resulta escrever se zero no quociente, e formar o dividendo parcial 3632, com o qual se procede similhantemente.

Convêm observar, que a multiplicação e divisão, resolvendo duas questões inversas huma da outra, podem servir reciprocamente, como já se notou ácerca da addição e subtracção, para verificar os seos resultados: isto he, no caso da multiplicação, o producto achado dividido por hum dos factores deve dar o outro no quociente; e no caso da divisão o divisor multiplicado pelo quociente achado deve reproduzir o dividendo.

Taboa de Addição e Multiplicação Elementar.

0	9	8	7	6	5	4	3	2	~~0~~ 1
1	10	9	8	7	6	5	4	3	2 / 1
2	11	10	9	8	7	6	5	4 / 4	2
3	12	11	10	9	8	7	6 / 9	6	3
4	13	12	11	10	9	8 / 16	12	8	4
5	14	13	12	11	10 / 25	20	15	10	5
6	15	14	13	12 / 36	30	24	18	12	6
7	16	15	14 / 49	42	35	28	21	14	7
8	17	16 / 64	56	48	40	32	24	16	8
9	18 / 81	72	63	54	45	36	27	18	9

A

B

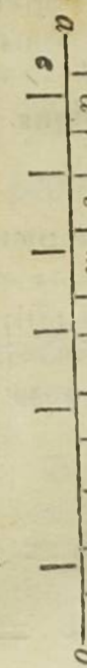
Nota. — He facil de ver nas tabellas G e I que a mesma combinação dos algarismos da serie superior com os da lateral se repetem duas vezes : por ex. [tab. G] 5 superior +7 lateral =12 ; e 7 superior

$+5$ lateral $=12$: [tab. I.] 5 superior $\times 7$ lateral $=35$, e 7 superior $\times 5$ lateral $=35$. Nesta tabella se evita a duplicação de resultados, invertendo a ordem dos algarismos significativos da serie superior; ganhando-se demais a vantagem de reunir no mesmo espaço as duas tabellas G e I. A parte da tabella superior ao traço *ab* comprehende os resultados da addição, que se achão do mesmo modo que se praticou na formação da tab. G: e a parte inferior comprehende os resultados da multiplicação, que se achão, escrevendo primeiramente a serie lateral da direita 1, 2, 3 &c., e praticando com esta serie o mesmo que se fez com a serie superior da tabella I. No uso desta tabella deve-se procurar o maior dos algarismos dados na serie superior, e o menor na lateral, tratando-se de addição: nos casos porém de multiplicação convém praticar o inverso, isto he, procurar o menor na superior, e o maior na lateral.

M.

Addição, Subtracção, Multiplicação, e Divisão, praticadas sobre as Fracções Ordinarias.

[1.º ex.]



$$\frac{1}{4} = \text{dobro de } \frac{1}{8} = \text{tripulo de } \frac{1}{12} = \ldots$$

$$\frac{3}{4} = \left\{\frac{3}{8}\times 2\right\} = \frac{6}{8} = \left\{\frac{3}{12}\times 3\right\} = \frac{9}{12} = \ldots$$

2.º Exemplo.

addição ..... $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \ldots = \frac{3\times5}{4\times5} + \frac{2\times4}{5\times4} \ldots\ldots = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20}$

subtracção .. $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \ldots = \frac{3\times5}{4\times5} - \frac{2\times4}{5\times4} \ldots\ldots = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}$

multiplicação . $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \ldots = \left\{\frac{1}{5} \text{ de } \frac{3}{4}\times 2 \ldots\right\} = \frac{3\times2}{4\times5} \ldots = \frac{6}{20}$

divisão ...... $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} \ldots = \left\{\frac{3}{4\times2} \times 5 \ldots\right\} = \frac{3\times5}{4\times2} \ldots = \frac{15}{8}$

3.º Exempl.

addição successiva .... $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{9}{10} = \frac{3\times5.10}{4\times5.10} + \frac{2\times4.10}{5\times4.10} + \frac{9\times4.5}{10\times4.5} = \frac{150}{250} + \frac{80}{250} + \frac{180}{250} = \frac{410}{250}$

Nota. — (1.º exemplo). Se a unidade he representada pela distancia ab, tem-se $\frac{1}{4}$ = quarta parte de $ab = ac$, $\frac{1}{8}$ = metade de $ac = ad$, $\frac{1}{12}$ = terça parte $ac = ae$, e tambem $ao = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ = dobro de $am \left(\frac{3}{8}\right)$ = triplo de $ac \left(\frac{3}{12}\right)$.

Daqui se tirão as seguintes propriedades das fracções ordinarias. 1.ª que ambos os seos termos podem ser multiplicados por 2, 3, &c., em geral por hum mesmo numero, sem alteração de valor. 2.ª Que huma fracção torna-se dupla, tripula, &c.: se o numerador he multiplicado por 2, 3, &c.; ou se o denominador he dividido pelos mesmos numeros: e torna-se vice versa a metade, terça parte, &c., se o numerador he dividido por 2, 3, &c.; ou se o denominador he multiplicado pelos mesmos numeros.

(2.º exemplo). *Addiçaõ.* As fracções propostas $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, sendo multiplos de differentes submultiplos da unidade, não se podem ajuntar, sem que se reduzão primeiramente ao mesmo *denominador*; o que se consegue multiplicando ambos os termos da primeira pelo denominador da segunda, e ambos os termos desta pelo denominador daquella: donde resultão as novas fracções equivalentes ás propostas $\frac{15}{20}$ e $\frac{8}{20}$. Feita esta preparação, diz-se 15 das vinte partes iguaes, em que a unidade está dividida, mais 8 destas fazem 23 dessas mesmas partes. *Subtracção.* Feita a mesma preparação, que teve lugar na addição, procede-se de hum modo similhante; dizendo

15 das vinte partes iguaes, em que a unidade está dividida menos 8 destas fazem 7 dessas mesmas partes. *Multiplicação*, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ quer dizer $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$, isto he, que considerando $\frac{3}{4}$ como hum todo dividido em 5 partes iguaes, destas se devem tomar duas: já se vio que multiplicando o denominador de huma fracção por 5, a fracção se torna á quinta parte da sua grandeza, portanto $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{4\times5}$, e o producto pedido $= \frac{3\times2}{4\times5}$. *Divisão* $\frac{3}{4} : 2 =$ metade de $\frac{3}{4} = \frac{3}{4\times2}$; mas o divisor 2 he 5 vezes maior que o proposto $\frac{2}{5}$; portanto a fracção $\frac{3}{4\times2}$ he 5 vezes menor do que a pedida, a qual será por conseguinte $= \frac{3\times5}{4\times2}$.

(3.º Exemplo). *Addicção successiva*. As fracções $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{10}$ reduzem-se ao mesmo denominador multiplicando os dois termos da primeira por 5×10, os dois termos da segunda por 4×10, e os dois termos da terceira por 4×5; e pratica-se como no caso da addição de duas fracções. Daqui se podem tirar as seguintes regras praticas: 1.ª *Addicção* e *subtracção*. Reduzidas primeiramente as fracções propostas ao mesmo *denominador*, a somma ou differença dos numeradores, e o denominador commum formão a fracção pedida. — 2.ª *Multiplicação*. Multiplicão-se ordenadamente os dois termos da fracção *multiplicando* pelos 2 termos da fracção *multiplicador*; e a fracção resultante he o producto pedido. — 3.ª *Divisão.* Invertem-se primeiramente os termos da fracção divisor, e executa-se a multiplicação; o producto assim achado he o quociente pedido. — 4.ª *Addição Successiva.* Na reducção ao mesmo denominador, multiplicão-se os dois termos de cada fracção pelo producto dos denominadores de todas as outras.

N.

Addição, Subtracção, Multiplicação, e Divisão das Fracções Decimaes.

$$365 = 36{,}5 \times 10 = 3{,}65 \times 100 = 0{,}365 \times 1000$$

[1.º Exemplo].

(2.º exemplo)

parcella .	3,65	
”	0,917	
ma ..	4,567	maior....
	0,917	menor ...
	3,650	differença.

Addição. — *Subtracção.*

(3.º exemplo)

3,65
0,917
0,0625
4,6295

Addicção Successiva.

multiplicando	3,65
multiplicador.........	2,8
	2 9 2 0
	7 3 0
producto............	10,2 2 0

Multiplicação.

(4.º exemplo)

10,2 2 0	3,65	dividendo.
2 9 2 0		divisor...
0 0 0	2,8	quociente.

Divisão.

Nota. — (1.º exemplo). Neste exemplo se faz ver, que em qualquer *numero decimal*, sendo assignada a virgula (,) huma, duas, tres casas, &c., para a esquerda da sua primeira situação, torna-se o numero 10, 100, 1000 vezes &c., menor; e vice-versa 10, 100, 1000 vezes &c., maior, correndo ella para a direita huma, duas, tres casas, &c. Com effeito, sendo a unidade =10 decimas =100 centesimas, &c.; Claro fica, que 365 he 10 vezes maior do que 36,5; e 1 000 vezes maior do que 0,365.

[2.º exemplo]. *Addição*, e *Subtracção*. Escriptos os numeros propostos como indica a tabella isto he, de maneira, que as virgulas se correspondão, pois que assim ficão correspondendo entre si as casas de unidades da mesma especie, procede-se, como ja se fez sobre os numeros inteiros, tendo attenção a collocar a virgula competentemente na *somma*, e *differença* achadas; e notando que os zeros postos á direita de hum numero decimal são tão indifferentes, como sendo collocados á esquerda de hum numero inteiro, isto he, podem existir ou não, sem que por isso a expressão do numero seja alterada: p. ex. a differença achada 3,650 he a mesma parcella 3,65.

[3.º Exemplo]. *Addicção successiva*. Procede-se neste exemplo similhantemente ao que se praticou com os numeros inteiros, e ao que se disse no exemplo precedente.

[4.º Exemplo]. *Multiplicação*. Pratica-se esta operação, como se os *factores* dados fossem inteiros, separando-se com a virgula no producto assim achado, tantos algarismos para a direita, quantas são as casas decimaes de ambos os *factores*. Com effeito se o multiplicador fosse inteiro, isto he, 28: sendo o multiplicando expresso em *centessimas*, o producto appareceria na mesma especie de unidades; e conteria por conseguinte duas casas decimaes: mas 28 he 10 vezes maior do que o pedido; deve-se portanto, para ter este, correr naquelle com a virgula mais huma casa para a esquerda.

Divisão. Pratica-se esta operação, como se os numeros propostos fossem inteiros, separando depois no *quociente* achado tantas casas decimaes, quantas bastem, para que com as do *divisor* fação hum numero igual as que existem no *dividendo*. Com effeito devendo o divisor multiplicado pelo quociente reproduzir o dividendo ; e tendo-se ja visto no exemplo precedente, que hum producto de factores decimaes contem tantas casas decimaes , quantas são as de ambos os factores : segue-se que no caso precedente, constando o dividendo de tres casas decimaes, o divisor de duas, deve existir huma no quociente achado.

O.

Transformações que podem ter lugar nas Fracções.

[1.º Exemplo]. $\frac{22}{7}=\left\{\frac{21}{7}+\frac{1}{7}=3+\frac{1}{7}\right\}=3\frac{1}{7}=\left\{\frac{3}{1}+\frac{1}{7}=\frac{3\times7}{1\times7}+\frac{1\times1}{7\times1}=\frac{21}{7}+\frac{1}{7}\right\}=\frac{22}{7}$

[2.º Ex.] $\frac{12}{16}=\frac{\frac{12}{4}}{\frac{16}{4}}=\frac{3}{4}$

[4.º Ex.]

	2	1	1	2	*quocientes.*
39	15	9	6	3	*dividendos, e divisores.*
9	6	3	0		*restos.*

(a)

$$\frac{15}{39}=\left\{\frac{1}{2\frac{9}{15}}=\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\frac{6}{9}}}=\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{1\frac{3}{6}}}}\right\}=\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{1\frac{1}{2}}}}=\left\{\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}=\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\frac{2}{3}}}=\cfrac{1}{2\cfrac{1}{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{2\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{13}{5}}=\right\}\frac{5}{13}$$

[3.º Exemplo]

$$\left\{\begin{array}{l|l} 5,\dot{0}\,\dot{0}\,\dot{0} & 8 \\ \quad 2\,\dot{0} & \overline{0,625} \\ \qquad 4\,\dot{0} & \\ \qquad\; 0 & \end{array}\right\}\frac{5}{8}=0,625=\frac{625}{1000}$$

[5.º Ex.]

$$\frac{22}{7}=3,142\frac{6}{7}$$

$=3,143$ [por aproximação]

[6.º Ex.]

7.º Exemplo.

$$\left(\frac{1}{9}=0,111\ \&c.\right)\ 0,333\ \&c.=\left(3\times0,111\ \&c.=3\times\frac{1}{9}\right)=\frac{3}{9}$$

$$\left(\frac{1}{99}=0,010101\ \&c.\right)\ 0,363636\ \&c.=\left(36\times0,010101\ \&c.=36\times\frac{1}{99}\right)=\frac{36}{99}$$

$$\left(\frac{1}{999}=0,001001001\ \&c.\right)0,365365365\ \&c.=\left(365\times0,001\ \&c.=365\times\frac{1}{999}\right)=\frac{365}{999}$$

Nota. — [1.º exemplo]. Ve-se por este exemplo, como huma *fracçaõ impropria* póde tomar a fórma de hum numero inteiro acompanhado de outra *fracçaõ propria*; e vice-versa a maneira porque desta expressão se passa á aquella. He claro, que a expressão $3\frac{1}{7}$ representa por outra parte o numero de vezes, que 22 contém a 7, acompanhado de huma fracção cujo numerador he o *resto* da divisão, e o denominador o *mesmo divisor*; e he facil de se convencer, que ella não he outra cousa mais, do que o quociente desta divisão; por isso que, sendo multiplicada pelo divisor 7 reproduz o dividendo 22: com effeito $3\times7+\frac{1}{7}\times7=21+\frac{7}{7}=21+1$. Daqui se conclue em geral, que huma fracção ordinaria póde ser considerada como exprimindo o quociente de huma divisão cujo *dividendo* he o numerador e o *divisor* o denominador da mesma; e vice-versa, que o quociente de huma divisão pode ser representado por huma fracção ordinaria, cujos termos sejão o dividendo e o divisor. Deve-se aqui notar, em consequencia do que se acaba de ver, que todas as vezes que a *divisaõ* sobre os numeros inteiros, ou decimaes derem hum *resto* final, o quociente compoem-se do numero inteiro, ou decimal achado, augmentado de huma fracção propria, cujo *numerador* he aquelle resto, e o *denominador* o divisor da operação.

[2.º Exemplo]. Ve-se por este exemplo a maneira de passar de huma fracção ordinaria á outra equivalente mais simples, dividindo ambos os seos termos pelo mesmo numero. No caso presente, em que o divisor 4 he o maior *divisor commum* entre 12 e 16, diz-se que $\frac{3}{4}$ he a mais *simples expressaõ* da fracção proposta $\frac{12}{16}$. Quando se ignora, qual he o maior divisor commum entre os dois termos, tenta-se a divisão primeiramente por 2, emquanto esta se póde fazer exactamente, depois por 3 por 5, &c.

[3.º Exemplo]. Neste exemplo se mostra o modo de passar de huma fracção ordinaria á huma serie de outras fracções equivalentes, que se chamão *continuas*; e vice-versa desta á huma outra fracção, que he sempre a mais simples expressão da proposta, quando isto he possivel No caso presente passa-se da fracção $\frac{15}{39}$ á immediata, dividindo-se ambos os seos termos pelo numerador 15; com effeito 15 dividido por 15 dá 1 no quociente, e 39 dividido por 15 dá o numere inteiro 2 e o resto 9, isto he o quociente $2\frac{2}{15}$: desta passa se á segunda fracção continua, dividindo similhantemente ambos os termos de $\frac{9}{15}$ pelo numerador 9, e assim por diante até a fracção [a], cujo numerador he 1, e o denominador compoem se de fracções, dependentes humas das outras, sendo tambem 1 o numerador de cada huma dellas. Cumpre aqui notar, que esta fracção só differe da antecedente, quanto á fórma, em ter esta á fracção final componente $\frac{3}{6}$, quando naquella he $\frac{1}{2}$, isto he a mais simples expressão de $\frac{3}{6}$, pois que o maior divisor commum entre 3 e 6 he o numerador 3. Para passar agora da fracção continua [a] á ordinaria equivalente, reduz se successivamente as fracções, que compoem o seo denominador do modo seguinte: Começando pela parte inferior, diz-se: $1\frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $\frac{1}{\frac{3}{2}}$ ou 1 dividido por $\frac{3}{2} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{3}$ [invertendo os termos do divisor] $= \frac{2}{3}$; $1\frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$; $\frac{1}{\frac{5}{3}} =$ 1 dividido $\frac{5}{3} = 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$; $2\frac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; finalmente $\frac{1}{\frac{13}{5}} = 1 \times \frac{5}{13} = \frac{5}{13}$, fracção equivalente á proposta, e reduzida á sua mais simples expressão. Se se quizesse huma simplificação por aproximação, desprezando a fracção final competentemente $\frac{1}{2}$ no total [*a*], e fazendo huma reducção similhante á precedente, ter-se-hia $\frac{2}{5}$, fracção ainda mais simples, do que a rigorosa $\frac{5}{13}$, excedendo-a sómente em $\frac{1}{65}$; o que se póde verificar, reduzindo ambas ao mesmo denominador.

[4.º Exemplo]. Este exemplo representa a serie de divisões praticadas no exemplo precedente; isto he, divide-se primeiramente 39 por 15, depois o divisor 15 pelo primeiro resto 9; e assim por diante. He facil de ver, que se ambos os termos da fracção $\frac{15}{39}$ forem divididos pelo ultimo divisor, assim achado, 3, resulta a mesma fracção $\frac{5}{13}$: e torna-se então escusada a mencionada reducção das fracções continuas.

[5.º Exemplo]. Neste exemplo mostra-se a maneira de reduzir huma fracção ordinaria á outra equivalente decimal; e vice-versa. No caso proposto divide-se 5 por 8, collocando a virgula á direita do 5, e escrevendo á direita della successivamente tantos zeros, quantos são precisos para terminar a divisão; isto he, escripto o primeiro zero, acha-se o algarismo 6 do quociente; escripto o segundo acha-se o algarismo 2; e assim por diante: e corrige-se o quociente achado: contendo tantas casas decimaes no dividendo, quantos são os zeros escriptos á direita da virgula, tem-se por este modo $\frac{5}{8} = 0{,}625$; e esta fracção decimal pode ainda ser transformada na ordinaria $\frac{625}{1000}$, o que já se fez ver, tratando-se da notação das fracções. Cumpre aqui notar, que sómente as fracções, cujos denominadores são, 2, 5, ou os numeros cujos factores se compoem destes, dão hum quociente exacto.

[6.º Exemplo]. Este exemplo mostra o caso de huma transformação approximada, quando o denominador da fracção não divide exactamente o numerador: então na divisão se deve escrever á direita da virgula tantos zeros, quantas casas decimaes se querem no quociente. No caso presente, querendo-se a approximação até a terceira casa decimal, despresa-se a fracção ordinaria $\frac{6}{7}$ de huma millesima; e attendendo a que esta fracção se aproxima mais de 1 millessima, do que de zero, ajunta-se huma millesima ao numero que fica. Cumpre notar, que em algum caso das transformações desta natureza, pode apresentar-se huma fracção da fórma $\frac{2}{3{,}1}$, a qual se póde mudar em $\frac{20}{51}$, multiplicando ambos os termos daquella por 10; e o mesmo se diz dos outros ~~com~~ casos similhantes. [7.o Exemplo]. Este exemplo comprehende tres differentes casos das fracções decimaes que tem o nome de *dizima periodica*; a saber: 0,33 &c., 0,3636 &c.; 0,365 &c.; e he claro pela inspecção da tabella, que estas fracções se transformão em outras ordinarias equivalentes, tomando em cada huma hum periodo para numerador, e dando por denominador hum numero composto de tantos noves, quantas são as letras desse periodo.

P.

PROPORÇOENS, E FORMULAS.

	Proporções por Differenças.	Proporções por Quocientes.	
Notação.	$6-2=9-5$ [a] $6\,.\,2 : 9\,.\,5$ [b] ou $2\,.\,6 : 5\,.\,9$	$\frac{6'}{2'}=\frac{9''}{3''}$ [a] $6' : 2' :: 9'' : 3''$ [b] ou $2' : 6' :: 3'' : 9''$	Notação.
	$\div 1\,.\,3\,.\,5$ [c] $\div 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.$ & [d]	$\div 1 : 2 : 4$ [c] $\div 1 : 2 : 4 : 8$ & [d]	
Propriedades.	$6+5=9+2$ [e] $6\,.\,9 : 2\,.\,5$ [f]	$6\times 3=9\times 2$ [e] $6 : 9 :: 2 : 3$ [f] $6\pm2 : 6 :: 9\pm3 : 9$ $: 2 : 3$ [g]	Propriedades.
Formulas.	$2\,.\,5 : 6\,.\,x$ [1.a] $(2+x=6+5)$ $x=6+5-2=9$	$2' : 5' :: 6'' : x''$ [1.a] $(2\times x''=6''\times 5)$ $x''=\frac{6\times 5}{2}=15$	
	$3\,.\,x : x\,.\,12$ [2.a] $(x+x=12+3)$ $x=\frac{12+3}{2}=7{,}5$	$3 : x :: x : 12$ [2.a] $(x\times x=12\times 3)$ $x=6$	Formulas.

$$365'=x'+y'+z',\quad x' : y' : z' :: 2 : 3 : 5$$

$$2+3+5 : 2 :: 365' : x'=\frac{365'\times 2}{10}=73',0$$

$$[3.^a]\quad ,, \quad : 3 \quad ,, \quad : y'=\frac{365'\times 3}{10}=109',5$$

$$,, \quad : 5 \quad ,, \quad : z'=\frac{365'\times 5}{10}=182',5$$

$$\overline{365,0}$$

Nota. — [Proporções por differenças] Notação. Se quatro quantidades da mesma especie, representadas por numeros forem taes, que a *differença* entre duas dellas seja igual á *differença* das outras duas, diz-se que essas quatro quantidades, ou os numeros que as representão estão em *proporção por differenças*, que tambem se chama *proporção arithmetica*. Os numeros que satisfazem esta condição, como mostra o exemplo [*a*], se escrevem como se vê em [*b*]; e diz se, que 6 *está para* 2 *assim como* 9 *está para* 5: isto he, *que* 6 *excede a* 2 *tanto quanto* 9 *excede a* 5. [Estes quatro numeros chamão-se termos da proporção, designando-se como primeiro o que está á esquerda. A *differença* dos dois primeiros termos chama-se *primeira razão* [6 — 2]; e a differença dos dois ultimos *segunda razão* [9 — 5] O primeiro e terceiro termo tem a denominação especial de *antecedentes*; o segundo e o quarto de *consequentes*: tambem se chamão *extremos* o primeiro e quarto termo, e *meios* o segundo e terceiro]. Se o segundo e terceiro termo são iguaes, a proporção escreve-se como mostra o exemplo [*c*]; e diz se 1 *está para* 3 *assim como* 3 *está para* 5; *e se chama neste caso huma proporção arithmetica continua*. Huma proporção arithmetica continua levada além do terceiro termo indefinidamente, tem o nome de *progressão por differenças*, ou de *progressão arithmetica*, como se mostra no exemplo [*d*]; e diz-se, 1 *para* 3, *assim como* 3 *para* 5, *assim como* 5 *para* 7, &c. [A differença entre os dois primeiros termos chama se a *razão da progressaõ arithmetica*. Se os termos da progressão vão sendo cada vez maiores, depois do primeiro, como no exemplo [*d*], esta se chama *crescente*; e *decrescente* no caso contrario: ou tambem *ascendente*, e *decendente*]. *Propriedades*. Se no exemplo [*a*], que representa a proporção [*b*] se ajuntar primeiramente 2 á esquerda e á direita do signal de igualdade [=], e depois 5; he claro, que + 2 destróe a — 2 na esquerda, e que + 5 destróe a — 5 na direita; donde resulta a equivalencia [*e*]; isto he, que em huma proporção por differenças a *somma dos extremos he igual á somma dos meios*; o que commumente se chama propriedade fundamental destas proporções. Daqui se vê, que a proporção [*b*] póde ser escripta da maneira exemplificada em [*f*], isto he, que os meios podem trocar os lugares, ao que se chama *alternar*; pois que ainda se conserva a propriedade fundamental.

Formulas. — [1.ª]. Se se trata de achar hum numero [cuja grandeza seja representada por x] tal, que se saiba ser quarto termo de huma proporção por differenças, cujos tres primeiros termos são conhecidos; armada a proporção, como indica a tabella, e recorrendo á propriedade fundamental [$2 + x = 5 + 6$], vê se que o *quarto termo procurado* [x] *deve ser igual á somma dos meios, menos o primeiro termo.*

Se o numero pedido [x] deve ser o termo medio de huma proporção continua, ou como se costuma dizer huma *meia proporcional arithmetica* entre dois numeros dados; armada a proporção, como mostra a tabella, e recorrendo á mesma propriedade fundamental [$x + x = 3 + 12$], acha-se *que o termo medio* [x] *he igual á metade da somma dos extremos.*. Convém aqui notar, que muitas vezes se pede o *termo medio entre muitos numeros dados*; e que neste caso o *numero pedido he igual á somma de todos os propostos, dividida pelo numero destes.* Assim o termo medio

[x] entre os numeros 2, 5, e 7 he $= \frac{2+3+7}{3} = 4$;

isto he, *hum numero que tomado 3 vezes reproduz a somma dos propostos.*

[Proporções por quocientes]. *Notação.* Se quatro quantidades representadas por numeros [podendo ser duas de huma especie, e outras duas de especie differente] forem taes, que o quociente de duas dellas da mesma especie seja igual ao quociente das outras duas; diz-se, que estas quantidades, ou os numeros que as representão estão *em proporção por quocientes*; que tambem se chama proporção *geometrica.* Os numeros que satisfazem esta condição, como indica o exemplo [*a*], escreve-se como se ve em [*b*]; e diz se que 6' está para 2', assim como 9'' está para 3'', isto he, *que 6' contém a 2' tantas vezes, quantas 9'' contém a 3''.* [O signal ['] quer dizer, que os numeros sobre que elle está posto são de huma especie, e o signal ["] designa outra especie differente da primeira. O quociente dos dois primeiros termos $\left(\frac{6}{2}\right)$, e o dos dois outros $\left(\frac{9}{3}\right)$, ou as fracções $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$ chamão-se *primeira* e *segunda razão* nestas proporções. As outras denominações, de que se fez menção nas proporções por differenças tem tambem lugar nestas. A proporção por differenças, cujos meios são iguaes, ou a *proporção geometrica continua*, escreve-se, como indica o exemplo [c]; e diz-se, que 1 *está para 2 assim como 2 está para* 4: esta proporção levada além do terceiro termo indefinidamente dá a *progressão geometrica*, representada no exemplo [d]. [O quociente dos dois primeiros termos chama-se *razão da progressão Geometrica.*] Deve notar-se que na proporção continua os tres termos não podem deixar de ser quantidades da mesma especie. Convém tambem fazer aqui observar a differença notavel entre as duas especies de progressões, *arithmetica*, e *geometria*. Ve-se nos exemplos [c] de huma e outra especie, que sendo o primeiro termo o *mesmo*, [1], em hum e outro caso, e a razão tambem a mesma [2], do quarto termo por diante os termos da progressão geometrica vão sendo cada vez maiores, comparados com os correspondentes na progressão arithmetica; se porem a razão nestas progressões em lugar de 2 fosse $\frac{1}{2}$, ter-se-hião as progressões seguintes:

Arithmetica. $\div 1 . \frac{3}{2} . 2 . \frac{5}{2}$ &c.

Geometria. $\div\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$ &c.

[Estas progressões formão-se a [1.ª] ajuntando a razão ao primeiro termo, para ter o segundo: ajuntando-a depois a este, para ter o terceiro; a [2.ª] multiplicando o primeiro termo pela razão para ter o segundo; e este por aquella, para o terceiro; &c.] Ve-se pois, que neste caso a progressão arithmetica he crescente, emquanto os termos da outra decrescem rapidamente.

Propriedades. Considerando os numeros da proporção [*e*], sem referencia á especie alguma determinada de unidades [os quaes neste caso se chamão numeros *abstractos*], e postos na fórma do exemplo [*a*]: vê-se, que o dividendo 9 deve ser igual ao divisor 3 multiplicado pelo quociente $\frac{6}{2}$, isto he $9 = \frac{6 \times 3}{2}$; e que similhantemente o dividendo 6×3 deve ser igual ao divisor 2 multiplicado pelo quociente 9: donde resulta a equivalencia [*e*], a qual representa a propriedade chamada *fundamental* das proporções por quocientes; e esta se ennuncia, dizendo, *que o producto dos meios he igual ao producto dos extremos.* Em virtude desta propriedade se podem tambem *alternar* os termos da proporção por quocientes, como mostra o exemplo [*f*]: mas isto só póde ter lugar quando todos os termos são abstractos, ou numeros que representão quantidades da mesma especie.

A propriedade [*g*] que se lê 6 *mais ou menos* 2 *está para* 6 *ou para* 2 *assim como* 9 *mais ou menos* 3 *está para* 9 *ou para* 3, deduz-se facilmente da proproporção [*b*], posta na fórma do exemplo [*a*], ajuntando, ou tirando 1 á huma e outra razão; com effeito $\frac{6}{2} + 1 = \frac{9}{3} + 1$, ou $\frac{6}{2} + \frac{2}{2} = \frac{9}{3} + \frac{3}{3}$, ou $\frac{6+2}{2} = \frac{9+3}{3}$: e por conseguinte $6 + 2 : 2 :: 9 + 3 : 3$; tem-se de outro modo $\frac{2}{6} + 1 = \frac{3}{9} + 1$, ou $\frac{2+6}{6} = \frac{3+6}{9}$; e portanto $2 + 6 : 6 :: 3 + 9 : 9$. Se se tirasse agora 1 á cada razão, procedendo similhantemente se terião as outras duas formas comprehendidas no exemplo [*g*]. Esta propriedade no caso da proporção [*b*] ennuncia-se em geral assim:

a somma, ou differença dos dois primeiros termos está para o primeiro, ou o segundo, assim como a somma, ou differença dos dois outros está para o terceiro, ou o quarto: no caso porém da proporção [*f*] diz-se *a somma ou differença dos antecedentes está para o primeiro ou segundo antecedente, assim como a somma ou differença dos consequentes está para o primeiro ou o segundo consequente.* [Além destas propriedades contão-se outras, que por se reconhecerem facilmente, não valem apena de serem aqui exemplificados; taes são os seguintes: 1.º *que ambos os dois termos da primeira razaõ* de huma proporção geometrica, ou *ambos os dois da segunda*, ou *ambos os antecedentes*, ou *ambos os consequentes*, ou *todos os termos* simultaneamente podem ser *multiplicados*, ou *divídos* por hum mesmo numero sem que a proporção se altere; o que claramente se comprehende, pondo a proporção debaixo da fórma [*a*]. 2.º Que duas ou mais proporções podem ser *multiplicadas ordenadamente*, termo por termo; ou que tambem os termos de *huma* podem ser *divididos* do mesmo modo pelos termos de *outra*, conservando-se ainda os resultados em proporção; o que se póde verificar sem difficuldade, pondo as proporções debaixo da fórma [*a*]. [As razões, e proporções que daqui resultão chamão-se *compostas*].

Formulas [1.ª] Se se trata de achar hum numero [x''] tal, que seja o quarto termo de huma proporção geometrica, cujos tres primeiros são conhecidos: armada primeiramente a proporção como indica a tabella no caso proposto, e recorrendo á propriedade fundamental [$2 \times x'' = 6'' \times 5$], tem-se o quarto termo [x''] *igual ao producto dos meios dividido pelo primeiro.* [Convém aqui advertir, que antes de fazer uso da propriedade fundamental, os termos da primeira razão devem reduzir-se á numeros *abstratos*, o que se consegue sendo ambos divididos pela *unidade*, á que se referem: esta preparação he indispensavel, porisso que a multiplicação não póde ter geralmente lugar, sem que hum dos factores ao menos seja abstracto. Tambem não póde haver difficuldade em deduzir da propriedade fundamental o valor do quarto termo [x'']; pois que se por ella se tem o *dobro*, *tripulo*, *quadruplo* de [x''], &c. igual ao producto dos meios, claro fica, que x'' deve ser igual á *metade*, *terça parte &c.*, deste mesmo producto. Esta fórmula tem commumente o nome de *regra de tres*; accrescendo-lhe a denominação de *composta*, quando entra na proporção huma ou mais razões desta especie]. [2.ª]. Se o numero pedido [x''] deve ser o termo medio de huma proporção continua geometrica, cujos extremos sejão conhecidos; ou como tambem se diz huma *meia proporcional geometrica* entre dois numeros dados; armada a proporção, como mostra a tabella; tem-se, pela propriedade fundamental, $x \times x = 12 \times 2$; e achar-se-ha o valor de x, buscando por tentativas, qual he o numero que multiplicado por si mesmo dá hum producto igual ao dos extremos; o que no caso presente dá $x = 6$. [Pela mesma razão já dada os tres termos desta proporção continua devem ser considerados como abstractos. O producto de hum numero por si mesmo chama-se *quadrado*, e cada hum dos factores *raiz quadrada*. O methodo porque se extrahe a raiz quadrada de hum numero proposto não he do dominio da Arithmetica, mas sim huma applicação da Algebra elementar: além de que as questões que delle dependem, são mui raros nos casos da Arithmetica, , podem ser resolvidos neste caso pelo meio indirecto e que acima indicamos].

[3.ª] Se se trata de dividir hum numero proposto em partes x', y', z', &c., que estejão entre si como outros tantos numeros dados: representada a questão, como exemplifica a tabella; he facil de ver que estando x' para y' para z' assim como 2 para 3 para 6, x' deve ter para a somma das tres partes [$x' + y' + z'$], ou para o numero proposto a *mesma razão*, que o numero que lhe he proporcional [2] tem para a somma dos tres numeros dados [$2 + 3 + 5$], proporcionaes áquellas partes. O mesmo se diz de [y'], e de [z']: donde resultão as tres proporções expressas na tabella, que sendo tratadas como já se disse da regra de tres resolvem a questão proposta.

Querendo proceder mais rigorosamente, deduzem-se dos dados da questão as proporções seguintes

$x' : y' :: 2 : 3$, $x' : z' :: 2 : 5$; a primeira dá $x'+y' : x' :: 2+3 : 2$, ou $\frac{x'+y'}{x'} = \frac{2+3}{2}$, esta equivalencia somada com a que resulta da segunda proporção $\frac{z'}{x} = \frac{5}{2}$, dá $\frac{x'+y'}{x'} + \frac{z'}{x'} = \frac{2+3}{2} + \frac{5}{2}$, ou $\frac{x'+y'+z'}{x'} = \frac{2+3+3}{2}$, ou $\frac{365'}{x'} = \frac{2+3+5}{2}$; donde se tira $2+3+5 : 2 :: 365' : x'$; discorrendo de hum modo similhante, se achão as outras duas proporções.

[He evidente, depois das observações precedentemente feitas, que os numeros dados 2, 3, 5, devem ser abstractos. Esta formula he conhecida pelo nome de regra de *companhia*, ou de *sociedade*, denominação derivada do seo uso na divisão de ganhos, ou perdas, proporcionalmente ás entradas dos associados em qualquer empresa, ou especulação].

Advertencia. — Todas as vezes que se diz, que quatro quantidades, ou numeros estão em proporção, entende-se sempre huma proporção por quocientes, ou geometricã: e para evitar ambiguidade, proporções por differenças tomão a denominação de *equidifferenças*.

APPENDICE.

METROLOGIA.

As unidades que se empregão na representação dos numeros em qualquer questão de Arithmetica, bem que possão ser de grandeza arbitraria, convém com tudo, que sejão ao mesmo tempo convencionaes, a fim de que os resultados numericos se prestem á huma interpretação uniforme. Daqui vem a necessidade de conhecer previamente nas applicações da Arithmetica as differentes especies de unidades convencionaes, admittidas por huma ou mais noções; o que faz o objecto da *Metrologia*. Classificão-se geralmente debaixo de cinco differentes denominações outras tantas especies de *unidades fundamentaes*; a saber: — 1.ª de tempo ou duração — 2.ª angular — 3.ª de extensão — 4.ª de pezo — 5.ª de valor; as quaes juntamente com as unidades, que se formão de multiplos, ou submultiplos respectivos, constituem differentes *systemas*, como passamos a expor.

Unidades de tempo, ou de duração.

60 segundos, ou $60''$.... = 1 minuto.

60 minutos, ou $60'$..... = 1 hora.

24 horas, ou 24^h...... = 1 dia. (unidade fundamental.)

7 dias, ou 7^d......... = 1 semana.

4 semanas .... = 1 mez commum.

13 mezes communs, e I dia.	=	1 anno commum.
12 mezes trigesimaes, e 5 dias.	=	
12 mezes do Calendario...	=	
52 semanas, e I dia......	=	
365 dias................	=	
$365\frac{1}{4}$ dias................	=	1 anno Juliano.
366 dias................	=	1 anno bissexto.
100 annos communs........	=	1 seculo.

Nota. A duração de huma revolução inteira da terra, no seo movimento de rotação ao redor de si mesma, chama-se *dia*. Se esta revolução he observada em relação á huma estrella, o tempo nella empregado tem o nome de *dia syderal*; o qual tem a propriedade de ser equivalente á duração de huma revolução inteira, e ser constantemente da mesma grandeza, não só em ordem a qualquer estrella, como em todas as epocas differentes, nas quaes possa ter lugar aquella observação, suppostas porem nestas as correcções necessarias: mas se a mesma revolução he tomada em relação ao Sol, o tempo nesta empregado tem o nome de *dia solar*; o qual he sempre hum pouco maior do que o *dia syderal* [quasi 4′ termo medio], e não goza da propriedade de ser o mesmo em differentes epocas de observação, durante a revolução inteira da terra no seo movimento de transtação ao redor do Sol, cuja duração se chama *anno tropico*. O *dia syderal* he tomado por unidade de tempo sómente entre os astronomos: o *dia solar medio* entre todos os do anno tropico he a unidade de tempo no anno civil; e he tambem esta que acima tomamos por fundamental. Os 12 mezes do Calendario tem, na mesma ordem de successão, partindo do começo do anno, as seguintes denominações: — Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho, Julho, Agosto, Setembro, Outubro, Novembro, Dezembro — destes são tregisemaes, ou de 30 dias, Abril, Junho, Setembro, e Novembro; Fevereiro tem 28 dias no anno commum, e reputa-se de 29 no anno bissexto; todos os mais são de 31 dias. Julio Cezar, com o fim de reformar o calendario do seo tempo, em que se reputava o anno civil de 365 dias, fez determinar por meio de observações Astronomicas a grandeza do anno tropico, que se achou ser de $365\frac{1}{4}$ dias, ou 365 dias e 6^h; e mandou em conformidade com este resultado, que o anno civil, que se seguisse a tres outros de 365 dias, fosse reputado de 366, por compensação ao despreso, que naquelles se havia feito, de 6^h em cada hum. Com o aperfeiçoamento das observações Astronomicas achou se depois, que o anno tropico era mui aproximadamente de 365^d 5^h $48'$ $48''$ (hoje $51'',6$): daqui se vio, que a intercalação de 1 dia de quatro em quatro annos, que se chamava a *correcção juliana*, era mais forte do que devêra ser $44'$ $48''$; differença esta que no espaço de 400 annos avulta a 3^d 2^h $40'$. O Papa Gregorio XIII, querendo corrigir este defeito do Calendario Romano, ordenou: — 1.° que se avançasse dez dias na contagem chronologica, dizendo se 15 *de Outubro* em lugar de 5 no anno de 1582, que então decorria, o que correspondia ao avanço do anno tropico sobre o civil: 2.° que tres annos *seculares* seguidos não fossem *bissextos*, por compensação aos tres dias contados de mais no espaço de 400 annos, segundo a correcção juliana; isto he, que os annos de 1700, 1800, 1900 não fossem bissextos, mas que o anno de 2000 o fosse; e assim por diante. Todas as Nações civilisadas admittirão estas mudanças, debaixo do nome de *reforma gregoriana*, á excepção sómente dos Russos que ainda seguem o Calendario Juliano; e por isso a sua chronologia se acha hoje atrazada 12 dias a respeito das outras Nações. A origem da contagem do tempo chama-se *era*. As Nações cultas tem adoptado por *era* commum a epoca do nascimento de Christo, que se chama por isso *era christã*. Este systema de unidades he geralmente adoptado pelas Nações da Europa e da America: deve-se com tudo advertir, que na *metrologia decimal* franceza, *o dia* he dividido em 10*h*, a *hora* em 100′, e o *minuto* em 100″; e bem que estas subdivisões sejão muito mais commodas para os calculos, ellas não estão em uso até o presente, senão entre os Astronomos Francezes.

Unidades Angulares.

60 segundos, ou 60″ ...... = 1 minuto..............

60 minutos, ou 60′........ = 1 gráo..............

90 gráos, ou 90°.......... = 1 quadrante [unidade fundamental.

4 quadrantes, ou 360°..... = circunferencia do circulo.

Nota. Se traçado hum circulo, se concebe a circunferencia dividida em 360 partes iguaes, duas linhas rectas de hum comprimento indefinido, que forem tiradas pelo centro, de maneira que interceptem na circunferencia 90 dessas partes, teráõ huma a respeito da outra a posição, que se chama *quadrante*, ou *angulo recto*, cuja grandeza he a mesma, quer o circulo traçado seja grande, ou seja pequeno, e he evidente que 4 quadrantes abrangem toda a circunferencia do circulo. Este systema de unidades he tambem geralmente adoptado; mas na metrologia decimal, de que fallamos precedentemente, os Francezes dividem o *quadrante*, ou *unidade angular* em 100 grados, ou 100g, o grado em 100′, o minuto em 100″; o que porém está ainda em uso sómente entre os Geometras desta Nação.

Unidades de Extensão, e de Peso.

			Unidades Fundamentaes.			
			de comprimento	de superficie	de capacidade	de peso
Multiplos.	Myria	10.000				
	Kilo	1.000				
	Heto	100				
	Deca	10				
	[1]		METRO.	ARO.	LITRO.	GRAMMO.
Submultiplos.	Deci.	0,1	Unidade elementar — decima milionessima parte do comprimento do quarto de circumferencia do meridiano terrestre.	O quadrado formado sobre dez metros.	O cubo da decima parte do metro.	A millessima parte do pezo da agua destilada, contida no litro na temperatura de +4 gráos centigrados.
	Centi.	0,01				
	Milli.	0,001				

Nota. Para ter as unidades formadas dos multiplos e submultiplos de cada huma das fundamentaes, he preciso combinar cada huma das denominações destas, com as denominações dos multiplos, e submultiplos, que se achão na columna da esquerda; dizendo: *decametro* =10 metros, *decaro* =10 aros, *decalitro* =10 litros, *decagrammo* =10 grammos;

decimetro $= \frac{1}{10}$ do metro, *deciáro* $= \frac{1}{10}$ do aro, *decilitro* $= \frac{1}{10}$ do litro; *decigrammo* $= \frac{1}{10}$ do grammo; similhantemente se procede nas outras combinações.

O litro, e as unidades que delle se compoem se empregão na medida de materias liquidas e secas; e para medir a *solides* forma-se do *kilolitro* huma nova unidade, a que se dá o nome de *Sterco*, a qual sendo tomada por fundamental, está sujeita ao mesmo systema de multiplos, e submultiplos.

O systema de unidades que vimos de expor foi organisado dela Academia das Sciencias em França, e admittido legalmente pelo governo francez no anno de 1795; e he conhecido debaixo do nome de *systema metrico.* A sua perfeição sobre todos os outros systemas conhecidos, de pesos e medidas, particulares as differentes Nações, o tem feito adoptar por algumas destas em todo, ou em parte, se bem que debaixo de outras denominações: e na esperança de que elle será hum dia geralmente adoptado, lhe havemos tambem dado a preferencia de exposição. Para fundamentar esta nossa opinião, julgamos dizer tudo, transcrevendo aqui o juizo de Mr de Deplace á este respeito, hum dos mais celebres collaboradores do systema em questão: " Não se póde ver o numero prodigoso de medidas, não sómente usadas por differentes povos, mas até por huma mesma Nação; as suas divisões estravagantes e incommodas para os calculos; a difficuldade de as conhecer, e comparar; em fim o embaraço e as fraudes, que daqui resultão para o Commercio; sem considerar, como hum dos maiores serviços, que os Governos podem fazer á Sociedade, a adopção de hum systema de medidas, cujas divisões uniformes se prestem facilmente ao calculo, e que sejão derivadas, da maneira menos arbitraria, de huma medida fundamental, indicada pela mesma natureza. O povo que creasse para si hum similhante systema, reuniria a vantagem de colher os seos primeiros fructos a satisfação de ver o seo exemplo imitado por outros povos, que o reconhecerião por seo bemfeitor: porque o imperio lento, mas irresistivel, da razão subjuga com o andar dos tempos os ciumes das Nações, e vence todos os obstaculos que se oppoem á posse de huma utilidade geralmente reconhecida. Taes forão os motivos, que determinarão a Assembléa Constituinte a encarregar a Academia das Sciencias este importante objecto. O novo systema de pezos e medidas he o resultado dos trabalhos de seos Commissarios, auxiliados pelo zelo e luzes de muitos membros da Representação Nacional. Este systema fundado sobre a medida dos meridianos terrestres, convém igualmente a todos os povos: elle não tem relação com a França, senão pelo arco do meridiano, que a atravessa. Cumpre portanto esperar, que este systema, que reduz todas as medidas e seos calculos á escala, e as operações mais simples da Arithmetica decimal, será tão geralmente adoptado, quanto o tem sido o systema de numeração, de que elle he o complemento, e que, sem duvida, teve que vencer os mesmos obstaculos, que o poder do habito ainda oppoem á introducção das novas medidas: mas huma vez vulgarisadas, estas medidas serão garantidas, como a nossa Arithmetica, por este mesmo poder, que, junto ao da razão, assegura ás instituições humanas huma duração eterna. (Systema do Mundo). ,, Não será inutil advertir, que nem mesmo a nomenclatura deste systema tem relação com a lingua franceza, pois que os termos que nella entrão são huns gregos, outros latinos, cuja escolha não podia ser mais acertada, tentando-se de conciliar a simplicidade da divisão com a propriedade da significação: e esta circunstancia mostra hum obstaculo de menos, e offerece huma razão de mais, para que elle seja adoptado pelas outras Nações.

As unidades fundamentaes do informe systema de pezos e medidas portuguez, que ainda tem uso legal no Brasil, comparaveis ás da mesma especie no systema metrico, são a *vara*, e o *marco* da Casa da Moeda. O Doutor Pedro Nunes, celebre astronomo portuguez, que floreceo no seculo 16, achou, que a circunferencia do meridiano terrestre, expressa em varas, era representada pelo numero 36 escripto quatro vezes seguidamente, isto he, 36 36 36 36; e sabendo nós por outra parte que o quarto desta circunferencia he representada por 10 milhões de *metros*; daqui se conclue, que aquelle numero de *varas* he igual á 40 milhões de *metros*: donde se tira 1 *vara* $=\frac{11}{10}$ do *metro*, $=1,^{m}1$; esta relação he tambem conforme com a que resulta da comparação directa entre estas duas medidas. O *marco* he equivalente á 229,46 *grammos* $=229,^{g}46$. A vara se divide em 5 *palmos*; 2 varas $=1$ *braça*; 3.000 braças $=1$ *legoa de sesmaria*. Nos usos da Marinha a *legoa* he $\frac{1}{18}$ do comprimento de *hum gráo* do meridiano, isto he, 2806 *braças*. [O *covado*, usado no commercio não tem relação determinada com a *vara*, e he equivalente á $0,^{m}677$] 1 marco $=8$ *onças*, 1 onça $=8$ *oitavas*; 1 oitava $=24$ grãos: 2 marcos $=1$ *libra* do commercio; 32 libras $=1$ *arroba*; 4 arrobas $=1$ *quintal*; $13\frac{1}{2}$ quintaes $=1$ *tonelada*. [A libra dos Boticarios $=1\frac{1}{2}$ marco. O peso dos diamantes avalia-se em *kilates* de 4 *grãos*; 1 grão do kilate $=1,033$ *grão do marco*]. A superficie he avaliada em *palmos* e *braças quadradas*. As medidas de capacidade são o *alqueire* para as materias secas; e a *canada* de *quatro quartilhos* para os liquidos: a solidez se avalia em *palmos*, e *varas cubicas*. As medidas de capacidade tem variado tanto, e tão diversamente do padrão legal, que seria inteiramente inutil dar aqui alguma relação entre ellas e as medidas lineares. Deve-se advertir finalmente, que havemos feito menção só daquellas medidas, cujo conhecimento se faz ainda necessario, emquanto não melhoramos de *metrologia* nesta parte; deixando de fallar em huma multidão de outras, cuja noticia apenas serviria para mostrar mais amplamente a imperfeição de similhante systema.

Unidades de Valor.

Unidades Fundamentaes.				
	de valor nominal	de valor real correspondente		
Origem.	notação.	peso.	titulo.	denominação das moedas
INGLATERRA.	1 £, ou 1 Libra Sterlina. (= $20^{ſ}$, ou 20 shillings = 240^{d}, ou 240 pence)	$7,^{g}98$ (ouro)	0,917	Soberano
FRANÇA.	1^{f}, ou 1 Franco (= 10^{d}, ou 10 decimos. = 100^{c}, ou 100 centimos)	5^{g} (prata)	0,9	Franco
BRASIL.	1U ou 1 mil reis. [= 1.000 rs. ou 1000 réis].	$2,^{g}24$ (ouro)	0,917	$\frac{5}{32}$ da Peça (m. de 6U400)
PAR.	1U = $67,^{d}5$ = $7,^{f}08$ [ouro : prata :: 15,5 : I]			

Nota. — A tabella precedente encerra sómente as moedas principaes dos dois paizes, com que o Brasil tem hoje mais relações de commercio. Chama-se titulo nas moedas a relação numerica da quantidade de metal precioso puro comparado com o peso total: p. ex. na moeda franceza 9 decimos do peso do ouro ou prata amoedada são de ouro ou de prata pura, e 1 decimo de liga, isto he, cobre. Entre nós o titulo do ouro se exprime pela denominação de *quilates*, e o da prata de *dinheiros*; e se diz que o ouro das nossas moedas he de 22 quilates, e a prata de 11 dinheiros; duas denominações differentes, que representão a mesma relação numerica; pois que 22 quilates $= \frac{22}{24}$ do peso total $= 0{,}917$ e 11 dinheiros $= \frac{11}{12} = 0{,}917$. A unidade de peso a que nos referimos na tabella he o *grammo*. A moeda de ouro entre nós não está em harmonia com a moeda de prata, quanto ao valor, depois de 1810 em diante; pois que havendo-se cunhado dessa epoca para cá o peso forte Hespanhol, ou o Dollar Americano no valor de 960 rs., a nossa peça de 6U400 ficou desde logo valendo 8U000. A nossa moeda de 4U tambem não está em harmonia com a de 6U400, porisso que, sendo ambas de ouro do mesmo titulo, tem esta 4 oitavas de peso, e aquella sómente $2\frac{1}{4}$, devendo ter $2\frac{1}{2}$; e por esta razão se chamava moeda provincial. A moeda de prata de 960 rs. pesa $7\frac{1}{2}$ oitavas; e o seo titulo he de $10\frac{3}{4}$ dinheiros, isto he, em decimaes 0,9[illegible].

Muito importa nas operações mercantis conhecer a relação do valor nominal entre as moedas dos paizes, entre os quaes se commerceia; esta relação variavel segundo as circunstancias commerciaes, e a natureza das moedas que se comparão, toma em linguagem mercantil o nome de *cambio*. Se se comparão os valores nominaes das moedas de dois differentes paizes fazendo attenção sómente á mesma quantidade de metal precioso, que ellas representão, a relação que daqui resulta toma o nome de *par metallico* ou de *cambio par*, á roda do qual varia o cambio em geral dentro de certos limites. He assim que cambio *par* entre o Brasil e Londres era antes de 1810 de $67\frac{1}{2}$ pence por 1U; e que depois dessa epoca desceu a 54, em razão da alteração acima dita do nosso systema monetario [convém notar aqui que os Inglezes usão indifferentemente das denominações *soldo*, ou *shelim*; *dinheiro*, ou *peny*, e no plural *pence*]. Se se cuidar como he mister em organisar entre nós hum novo systema monetario, attento o depreciamento do actual meio circulante seria muito conveniente tomar por padrão de valores a peça de 6U400 no valor nominal de 10U: e então teriamos hum novo *par* para Londres, que se calcula pela seguinte proporção: 10U : 6U400 :: $67\frac{1}{2}$ pence : x = 43,2 p. Tira se ~~do exemplo~~ deste calculo o exemplo, para a reducção de hum cambio a outro, quando varia o valor nominal de huma das moedas que se comparão: isto he, o numero que representa o cambio está na razão inversa do valor da moeda variante, quero dizer diminue crescendo este valor, e viceversa. Cumpre notar finalmente, que em a nossa contabilidade de 1 *milhão de réis* se forma huma unidade com a denominação de *conto*.